AGORA — Papeles de Filosofía — (2015), 34/2: 25-43 ISSN 0211-6642
DOI http://dx.doi.org/10.15304/ag.34.2.2108

EL APORTE ALGEBRAICO DE GALOIS A LA TEORÍA DELEUZIANA DE LOS PROBLEMAS

Diego Abadi
Universidad de Buenos Aires - Université Paris 8
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas

Resumen

En *Diferencia y repetición* Deleuze se propone, entre otras cosas, dar nacimiento a una nueva teoría de los problemas. Lo problemático, asociado a otras nociones que le son complementarias como las de Idea y virtual, pasará de ser un momento negativo en el camino subjetivo hacia el saber a concebirse como una determinación objetiva del mundo. Así como al momento de exponer la noción de Idea, y los tres principios de determinación que le corresponden, Deleuze se sirve de herramientas que provienen del cálculo diferencial, será al álgebra, y en particular la teoría de Galois, el área de las matemáticas a la que se volcará a la hora de dar cuenta de esta novedosa forma de concebir los problemas. Pero si la influencia del cálculo diferencial en la teoría de la Idea ha sido ya explorada en la bibliografía de comentarios sobre la obra deleuziana, no ha sucedido lo mismo con la teoría de Galois, que hasta el momento se ha mantenido como una alusión no profundizada. Nuestra intención en el presente texto será entonces ofrecer una lectura de dicha teoría que permita sumar inteligibilidad en un área todavía poco explorada del pensamiento deleuziano.
Palabras clave: Deleuze, Galois, problemas, álgebra.

Abstract

In *Difference and Repetition* Deleuze intends, among other things, to give birth to a new theory of problems. The problematic, associated with other complementary notions such as Idea and virtual, will cease to be a negative moment in the subjective path to knowledge, to become an objective determination of the world. While when exposing the notion of Idea, and its three principles of determination, Deleuze uses tools that come from differential calculus, when trying to account for this new way of considering problems, it is algebra, and

Recibido: 28/08/2014. Aceptado: 15/12/2014.

in particular Galois' theory, the area of mathematics from which he extracts his insights. But if the influence of differential calculus in the theory of the Idea has already been explored in the literature of comments on Deleuze's work, Galois' theory has remained until now as a superficial allusion. Our intention in this text will then be to provide a reading of such a theory that helps to add some intelligibility to a fairly unexplored area of Deleuzian thought.
Keywords: Deleuze, Galois, problems, algebra.

1. Introducción

La noción de problema está quizá entre las nociones más importantes de todas las desarrolladas en *Diferencia y repetición*. Lo que habitualmente se comprende por problemático, tanto en los saberes naturales como en los filosóficos, se ve allí transformado y enriquecido, al punto de hacer emerger un nuevo concepto, con componentes y determinaciones que resulta preciso elucidar. Deleuze aclara, desde un primer momento, que en lugar de pensarse como una determinación subjetiva "que marca un momento de insuficiencia en el conocimiento, (...) la estructura problemática forma parte de los objetos",[1] y con esta muy breve indicación, quizá puede ya entreverse la magnitud del pasaje que Deleuze intentará realizar con respecto a la noción que nos ocupa. Ahora, si bien no podremos dar cuenta en toda su amplitud de la objetividad propia de lo problemático, pretensión que sólo podría llevarse a cabo desarrollando a su vez la noción complementaria de Idea, en el presente texto nos ocuparemos de poner en el foco dos caracteres que atañen fundamentalmente a la nueva concepción de lo problemático, y que permiten comprender su especificidad en el pensamiento deleuziano. Intentaremos, en un primer momento, exponer las herramientas conceptuales que permiten llevar a cabo una inversión en el modo tradicional de plantear la relación solución-problema, lo que nos permitirá sacara a la luz el carácter genético de lo problemático, y a la vez nos permitirá comprender un segundo carácter, derivado del primero, movimiento lógico de resolución que Deleuze denominará determinación progresiva.

Así como al momento de exponer la noción de Idea, y los tres principios de determinación que le corresponden, Deleuze se sirve de herramientas que provienen del cálculo diferencial, será el álgebra, y en particular la teoría de Galois, el área de las matemáticas a la que se volcará a la hora de dar cuenta de esta novedosa forma de concebir los problemas. Pero si la influencia del cálculo diferencial en la teoría de la Idea ha sido ya explorada en la bibliografía de comentarios sobre la obra deleuziana —pudiéndose citar como

[1] G. Deleuze, *Diferencia y repetición*, Buenos Aires, Amorrortu, 2006, p. 112.

casos paradigmáticos los artículos de Adan Evens, *Math Anxiety*,[2] y Simon Duffy, *Schizo-Math*,[3] no ha sucedido lo mismo con la teoría de Galois, que hasta el momento se ha mantenido como una alusión no profundizada. Nuestra intención en el presente texto será entonces ofrecer una lectura de dicha teoría que permita sumar inteligibilidad en un área todavía poco explorada del pensamiento deleuziano.

2. Aclaraciones metodológicas

Pero antes de proceder es necesario hacer algunas aclaraciones. En primer lugar, en lo que respecta a las nociones matemáticas que aparecen en la exposición de la noción de Idea en *Diferencia y repetición*, vale decir que aquellas no tienen allí un estatuto propiamente matemático. Deleuze se sirve de ellas, pero no lo hace más que para construir una noción puramente filosófica. Dice al respecto —aunque en otro contexto—: "Conocemos, es verdad, los peligros de invocar determinaciones científicas fuera de su terreno. Está el peligro de una metáfora arbitraria, o bien de una aplicación trabajosa. Pero estos peligros quizá pueden conjurarse si nos limitamos a extraer de los operadores científicos tal o cual rasgo conceptualizable que remite él mismo a dominios no científicos, y que converge con la ciencia sin caer en la aplicación ni en la metáfora".[4] El mismo objetivo y los mismos riesgos recaen, aunque de segunda mano, para el comentador. Si lo que como tal intentamos es ralentizar la velocidad de los conceptos, para insertar entre sus movimientos una sucesión explicativa que vaya de lo más simple a lo más complejo, el desafío que nos ocupa adquiere la siguiente forma: no podemos simplemente reconstruir las nociones científicas utilizadas por Deleuze reproduciendo las explicaciones que el campo en cuestión dé de sus propias nociones, ya que ello sería pedagógicamente estéril para el lector filósofo (impidiendo ese pasaje, esa extracción del rasgo conceptualizable en cuestión), pero tampoco puede prescindirse de cierta corrección matemática, ya que si nos desentendiéramos de esa exigencia no estaríamos más que proveyendo un ejemplo o una ilustración arbitraria, que más funcionaría como falsa cita de autoridad que como aporte filosófico. Para hacer

[2] A. Evens, "Math anxiety: Deleuze and the differential", *Angelaki: Journal of Theoretical Humanities* 5 (2000), 105-115.

[3] S. Duffy, "Schizo-Math. The logic of different/ciation and the philosophy of difference", *Angelaki: Journal of Theoretical Humanities* 9 (2004), 199-215.

[4] G. Deleuze, *La imagen-tiempo: estudios sobre cine 2*, Barcelona-Buenos Aires-México, Paidós, 2009, p. 175.

efectiva dicha extracción, que puede bien concebirse como una especie de contrabando, intentaremos rescatar lo que Deleuze consideró como el rasgo conceptualizable de la teoría de Galois. En ese sentido, nuestro aporte será muy sencillo: daremos una versión de dicha teoría que se detenga en todos los puntos que la exposición deleuziana da por sentados, construyendo una versión de la teoría de Galois más que elemental, que esté al alcance de los lectores que no tengan ningún conocimiento sobre matemáticas.

3. Necesidad de una nueva teoría de los problemas

En el capítulo tercero de *Diferencia y repetición*, Deleuze realiza el diagnóstico de lo que él denomina la imagen del pensamiento. La imagen del pensamiento está conformada por una serie de postulados que constituyen los presupuestos subjetivos o implícitos del pensamiento filosófico, y que en tanto presupuestos, proveen de antemano una respuesta de lo que significa pensar. Esta imagen construye así una ortodoxia, haciendo del pensamiento el ejercicio natural de una facultad representativa. Partiendo de su buena voluntad y de su natural afinidad por lo verdadero, postulando el ideal del sentido común y su funcionamiento según el modelo del reconocimiento, haciendo del error su único negativo y calcando los problemas sobre las proposiciones de la conciencia empírica, el pensamiento arriba a su fin natural en el saber. A contramano de esta imagen moral, que proyecta "una imagen deformante del pensamiento",[5] Deleuze se propone liberar al pensamiento de la Imagen, y para ello provee planteos alternativos a cada uno de los postulados mencionados. Podemos ver que uno de ellos, más precisamente el séptimo, se enfoca en la relación que tradicionalmente se instituyó entre los problemas y sus casos de solución. Este postulado, tanto como el resto de ellos, se distingue en una ilusión natural y una ilusión filosófica. La primera calca los problemas sobre las proposiciones en tanto soluciones, confundiendo al problema con una interrogación que se calca sobre sus respuestas probables y transformándose en el doble neutralizado de una proposición que se supone preexistente. Así pues, los problemas se plantean como completamente hechos, desapareciendo bajo su resolución, y lo verdadero y lo falso no se atribuyen más que a las soluciones. Sobre esto se monta la ilusión filosófica, que yendo un paso más allá con respecto a la ilusión natural, evalúa la verdad o la falsedad de un problema ya no según sus soluciones concretas, sino según su posibilidad de resolución. Tomando el

[5] G. Deleuze, *Diferencia y repetición*, Buenos Aires, Amorrortu, 2006, p. 205.

ejemplo del álgebra como ilustración de lo anterior, Deleuze afirma que "los problemas se calcan sobre ecuaciones algebraicas y se evalúan de acuerdo con la posibilidad de efectuar sobre los coeficientes de la ecuación un conjunto de operaciones que provee las raíces".[6] Con ese proceder pues, no se logra llevar lo verdadero y lo falso a los problemas mismos, en la medida en que, así planteado, el problema se mantiene como un fundamento que es simple condicionamiento exterior y se ve atrapado en un círculo vicioso, ya que su verdad sigue dependiendo de la de verdad de sus soluciones.

Es entonces en ese marco que los trabajos algebraicos de Abel y Galois representan para Deleuze un aporte capital: "Hay allí una inversión radical en la relación solución-problema, una revolución más considerable que la copernicana. Se ha podido decir que Abel inauguraba así una nueva *Crítica de la razón pura*, y superaba así el *extrinsequismo* kantiano. El mismo juicio es confirmado por los trabajos de Galois (…). La teoría de los problemas se ha transformado completamente, por fin está fundada".[7]

Recordemos que, siguiendo a Lautman, Deleuze dotaba al problema de una característica paradójica, ya que se lo considera como trascendente e inmanente a sus casos de solución. Trascendente, en tanto el elemento problemático presenta una diferencia de naturaleza con respecto a sus soluciones, pero a la vez inmanente, ya que estas últimas se generan como casos a partir de las condiciones determinantes del problema, y al hacerlo aportan mayor determinación al problema mismo.[8] Es entonces sobre este segundo carácter, el de la inmanencia de las soluciones al problema, que hay que detenerse para comprender la lógica que permite romper el círculo vicioso que acecha a la teoría de los problemas.

No se trata entonces simplemente de invertir la relación solución-problema, afirmando que los problemas tienen algún tipo de preeminencia sobre las soluciones, sea ésta lógica o temporal, sino de dotar al problema de un potencial que permita generar, a partir de sus propias condiciones, sus casos de solución. Más aún, la operación matemática de Abel y Galois no se contenta con ser un caso paradigmático a imitar, un caso exitoso de inversión, sino que provee un movimiento "lógico" que permite ser extraído de su campo propio de aplicación, y del cuál Deleuze puede tomar una noción, la de cuerpo de adjunción, que pasará a ser un componente clave en su propia teoría de los problemas.

---

[6] G. Deleuze, *Diferencia y repetición*, Buenos Aires, Amorrortu, 2006, p. 245.
[7] G. Deleuze, *Diferencia y repetición*, Buenos Aires, Amorrortu, 2006, p. 274.
[8] G. Deleuze, *Diferencia y repetición*, Buenos Aires, Amorrortu, 2006, p. 272.

4. Presentación general de las ecuaciones algebraicas

En la historia de las matemáticas, la figura de Galois debe su importancia al hecho de haber logrado explicar por qué las ecuaciones algebraicas de potencias iguales o mayores a 5 no poseen una solución general o exacta. Si bien nosotros no nos ocuparemos de exponer el método acabado por el cuál esto puede ser probado, sí intentaremos dar cuenta del problema al cual su teoría responde, y el método que desarrolla para ello. Para empezar entonces por el principio, es necesario aclarar a qué nos referimos cuando hablamos de ecuaciones algebraicas y de soluciones generales o exactas.

Una ecuación es una igualdad matemática en la que aparecen valores conocidos y valores desconocidos (incógnitas), relacionados mediante operaciones matemáticas. Claro está que bajo esta definición un tanto sencilla pueden distinguirse diversos tipos de ecuaciones, según las operaciones matemáticas y el conjunto de números sobre el que se busque la solución. Si tomamos como caso más elemental de ecuación a una operación que posea solamente una incógnita, cuyo dominio sean los números enteros y cuyas operaciones matemáticas sean la suma, la resta y la multiplicación, al aumentar el número de variables, hacer crecer el dominio en el cuál se emplaza, y expandir las operaciones que se le aplican, nos encontraremos en el terreno de las ecuaciones algebraicas, definidas también como ecuaciones polinómicas. El término polinomio alude a la cantidad de miembros de la ecuación, siendo un monomio un término aislado, y refiere así al modo algebraico de expresión de las ecuaciones cuya complejidad supera al de las ecuaciones elementales. Un polinomio puede tener un número mayor a uno -aunque finito- de variables y de constantes, y utiliza, además de las operaciones de suma, resta y multiplicación, los exponentes enteros positivos, es decir, las variables pueden estar elevadas a cualquier número entero positivo. Un polinomio, cuya notación es: P(x), es decir, polinomio de x, se ordena de izquierda a derecha, partiendo desde la incógnita que está elevada a la mayor potencia hasta el término independiente. Ejemplos de polinomios de distintos grados son entonces:

$$P(x) = x^2 + 2x + 4$$
$$P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 8$$

Si las “x” son las incógnitas, las “a” las constantes o coeficientes, y “n” la potencia a la cual está elevada la incógnita, la forma general de un polinomio será:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Las ecuaciones elementales son sencillas de resolver, ya que no tenemos más que conocer las propiedades de las operaciones matemáticas implicadas —la suma se transforma en resta al pasar de un lado al otro de la igualdad, la multiplicación se transforma en división— para despejar la incógnita y encontrar su valor. Para resolver las ecuaciones polinómicas, lo que se conoce como extraer su raíz, se iguala el polinomio a cero, denominándose a los números que verifiquen la ecuación sus raíces o soluciones. A diferencia entonces de una ecuación elemental, en una ecuación polinómica la incógnita puede tomar más de un valor, según el grado del polinomio, es decir, la mayor potencia a la que se encuentre elevada la variable.

Ahora, si bien se entiende que resolver una ecuación algebraica es extraer sus raíces, es decir, encontrar el valor de las incógnitas cuando el polinomio se iguala a cero, pueden distinguirse sin embargo dos tipos de soluciones. Las particulares, que son las recién mencionadas, y en donde la incógnita toma un valor numérico, por ejemplo en las ecuaciones $x^2 + 2x - 3 = 0$, cuya raíz es $x=1$, ó $x^2 - 4 = 0$, cuyas raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. Las soluciones generales en cambio no arrojan un valor numérico determinado, sino que mediante otra ecuación o fórmula proveen un algoritmo de resolubilidad para todas las ecuaciones de un mismo tipo. Las ecuaciones de grado 2, es decir, aquellas cuyo monomio mayor se encuentra elevado al cuadrado, poseen una solución general conocida como la fórmula cuadrática. Si escribimos la forma general de una ecuación de segundo grado de la siguiente manera $ax^2 + bx + c = 0$, la fórmula cuadrática nos permite hallar sus raíces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De tal manera, se llega a que la incógnita tiene dos valores, no necesariamente distintos, que constituyen las soluciones generales:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

5. Concepto de cuerpo y condiciones del problema

Aunque con soluciones que implicaban cálculos de mayor complejidad, para el siglo XVI los algebristas habían logrado resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado (es decir, mediante ecuaciones que brindaban un algoritmo de resolubilidad), pero no habían tenido éxito con las ecuaciones de quinto grado en adelante. Y es justamente allí donde entran en juego Abel y Galois, aunque cumpliendo un rol opuesto al de sus antecesores: no lograron dar una solución a las ecuaciones de grado cinco sino que, por el contrario, lograron probar que no existía tal tipo de solución para las ecuaciones de grado cinco en adelante.

Si anteriormente teníamos la ecuación como expresión de un problema, y sus resultados como la solución a dicho problema, a partir de Abel se parte, no de la ecuación como problema ya definido, sino de las condiciones del problema. Las condiciones serán entonces el cuerpo, o dominio de racionalidad, de la ecuación. Un cuerpo (K) es una estructura algebraica en la cual se definen dos operaciones, en este caso, la adición y multiplicación, y que cumple las siguientes propiedades:

i. K es cerrado para la adición y la multiplicación: para cualquier elemento a, b en K, $a + b$ y $a{\cdot}b$ pertenecen a K;
ii. asociatividad de la adición y la multiplicación: para todo a, b, c en K, $a + (b + c) = (a + b) + c$, y $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
iii. conmutatividad de la adición y la multiplicación: para todo a, b en K, $a + b = b + a$, y $a \cdot b = b \cdot a$;
iv. existencia de un elemento neutro: existe un elemento en 0 en K, tal que $a + 0 = a$, y un elemento 1 en K, tal que $a \cdot 1 = a$;
v. existencia de elemento opuesto y de inversos: para cada a en K, existe un elemento $-a$, tal que a + $(-a) = 0$, y para cada $a \neq 0$, existe un a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1}= 0$.

Si tenemos en cuenta los sistemas numéricos, ni los números naturales N (enteros positivos), ni los números enteros Z pueden considerarse cuerpos, ya que los primeros, si bien poseen elemento neutro (0 para la adición y 1 para la multiplicación), no poseen elementos opuestos o inversos (ya que si a es un elemento de N, su opuesto $-a$, siendo un número negativo, cae fuera de los números naturales), mientras que en el caso de los números enteros Z, si bien tienen elemento opuesto en el caso de la adición, no tienen elemento inverso en el caso de la multiplicación (el inverso de un número a sería $\frac{1}{a}$, que es un número fraccionario y cae fuera del campo de los enteros). Los números racionales Q en cambio sí forman un cuerpo, ya que incluyen tanto a los números negativos como a los fraccionarios.

Sabiendo entonces lo que es un cuerpo, podemos comprender lo que es un cuerpo de adjunción. Siguiendo a Jules Vuillemin, tomemos, a modo de ejemplo, la ecuación de segundo grado $x^2 - 2 = 0$, cuyo resultado es x= $\sqrt{2}$.[9] Ahora bien, si nos ubicamos en el cuerpo de los números racionales Q,

[9] J. Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, Paris, P.U.F., 1962, p. 223.

ese resultado no es un elemento del cuerpo Q (ya que $\sqrt{2}$ es un número irracional). Eso significa entonces que dicha ecuación, a diferencia de la ecuación $x^2 - 4 = 0$, cuyas raíces son $x_1= 2$ y $x_2= -2$, ambos números racionales, no es reductible en el cuerpo Q. Para resolver la ecuación en cuestión, hay que llevar a cabo entonces una adjunción al cuerpo Q, en este caso la adjunción de la cantidad $\sqrt{2}$. Como explica Vuillemin: "una adjunción cambia los elementos de un cuerpo, pero no altera su estructura. El cuerpo de partida se llama cuerpo de base, y el cuerpo de llegada cuerpo de adjunción. Por ejemplo, Q ($\sqrt{2}$) es un cuerpo de adjunción de Q".[10] Así pues, un cuerpo de adjunción amplía el dominio del cuerpo de partida, pero sólo a condición de no modificar su estructura, es decir, ninguna de las condiciones que definen a un cuerpo pueden ser pasadas por alto.

Pero cabe preguntarse entonces de qué manera puede determinarse una cantidad adjunta, en la medida en que se trata de un elemento extraño al cuerpo de base. Si tomamos la siguiente ecuación de tercer grado: $x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = 0$, cuyas raíces ya conocemos y son $x_1= 3$, $x_2= 1 + \sqrt{-2}$, $x_3= 1 - \sqrt{-2}$, veremos que todos los coeficientes de la ecuación son enteros, haciendo de esta entonces una relación en Q. Si nos paramos en el cuerpo de base Q, la raíz $x_1= 3$ tiene una existencia definida, al ser una magnitud perteneciente a Q, mientras que, por otro lado, desde dicho cuerpo se ignora la significación que pudieran tener los símbolos $1 + \sqrt{-2}$ y $1 - \sqrt{-2}$, lo que los hace indistinguibles entre sí. Es justamente en la medida en que una adjunción no puede alterar la estructura del grupo de base al que se agrega que x_2 y x_3 pueden ser intercambiadas, ya que ninguna relación en Q puede ser modificada por una sustitución entre dos cantidades que son entre sí indiscernibles. Desde el cuerpo de base entonces, las raíces x_2 y x_3 pueden ser intercambiadas a voluntad, teniendo "una existencia, por así decirlo, virtual y en todo caso incompleta".[11] Podemos ver entonces aquí de un modo preliminar cómo la determinación que conduce a identificar una individualidad —en este caso, una magnitud individual— está relacionada con sus sustituciones posibles. Es decir, si desde un dominio dos magnitudes son intercambiables entre sí, no poseen individualidad.

Se puede vislumbrar así la operación que complementa la adjunción. Si esta última amplía el campo de las condiciones, precisa sin embargo de otra operación que logre determinar las raíces, sumando gradualmente la discernibilidad que en un primer momento no poseen. Se trata de la descomposición en grupos y subgrupos de sustituciones de las raíces de la

[10] J. Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, Paris, P.U.F., 1962, p. 225.
[11] J. Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, Paris, P.U.F., 1962, p. 236.

ecuación, y la estructura de grupo será la herramienta que permita regular las sustituciones.

6. Concepto de grupo

Expliquemos entonces en qué consiste un grupo.[12] Si el cuerpo representaba una estructura compleja por la cantidad de condiciones que implicaba, un grupo será una estructura más débil, pero por ello mismo, también más flexible. Tal como el cuerpo, se trata de una estructura algebraica que debe ser cerrada, poseer asociatividad, identidad, y elemento inverso, pero, a diferencia de aquel, se define a partir de una sola operación binaria, y no necesariamente debe poseer conmutatividad. Si bien enumerando las propiedades que debe cumplir un grupo no se alcanza a ver su gran distancia con el cuerpo, el hecho de definirse a partir de una sola operación binaria, que no debe identificarse ni con la suma ni con la multiplicación, transforma al grupo en una estructura apta para ser utilizada en muchos dominios, muchos de los cuales exceden el campo propiamente matemático. En el caso de los números, un ejemplo de grupo infinito es el de los números enteros Z bajo la operación binaria de la adición. Las condiciones o axiomas estructurales se cumplen ya que se cumplen todas las condiciones requeridas: i. clausura: para cualquier par de enteros a y b, la suma a + b es también un entero; ii. asociatividad: dados a, b y c, a + (b + c) = (a+b) + c; iii. elemento identidad: el cero funciona como elemento identidad ya que al sumarse a cualquier entero se obtiene el mismo entero; iv. elemento inverso: para cada elemento a, hay un elemento - a que, sumado al primero, se obtiene cero.

Pero al margen de este ejemplo, la utilidad de la estructura de grupo viene dada tanto por el hecho de que es aplicable a campos no numéricos como por las posibilidades que abre en la construcción de estructuras finitas. Saliendo entonces del dominio numérico, en el cual tendemos a identificar a los elementos del grupo con números, puede comprobarse que para la estructura de grupo la naturaleza de sus elementos no tiene relevancia; así, se podrá decir que los elementos mismos de un grupo son operaciones, que deben cumplir alguna regla binaria de asociatividad y mantener las condiciones precisadas. Entre los diversos tipos de grupos que pueden distinguirse, si tomamos una figura geométrica y una operación de simetría, es decir, una operación que deje invariante a la figura en cuestión, podemos

[12] Utilizamos, para la siguiente exposición sobre teoría de grupos, el blog de Armando Martínez Telles, http://matematicas-de-la-simetria.blogspot.com.ar/

construir un grupo de simetría. En el caso más sencillo posible, el de una línea recta AB, se la puede girar en el plano de manera que el punto que en un primer momento lo ocupada la letra A lo ocupe la letra B, y viceversa.

A ——— B B ——— A

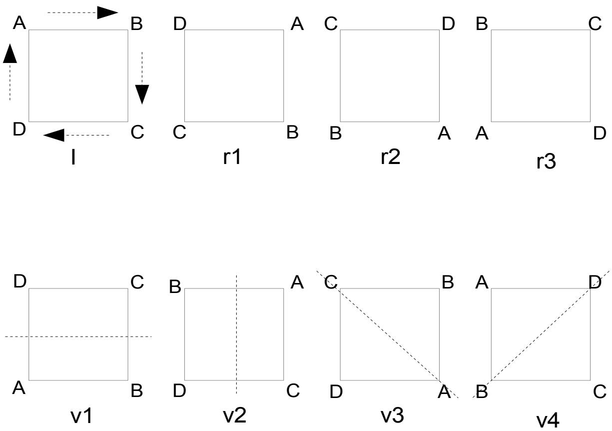
I **r**

Vemos que se trata de una operación de simetría ya que, si borráramos las letras, no podríamos distinguir las dos rectas entre sí. Las dos operaciones que marcamos son la operación identidad (I), que deja a la línea tal cual estaba, y la operación de rotación que intercambia los puntos extremos de la línea (r). Si asociamos estas operaciones, vemos que hay sólo 4 casos posibles de combinación: efectuar primero la operación I y después la operación I, primero la operación I y después la operación r, primero la operación r y después la operación I, y primero la operación r y después la operación r. Si utilizamos el signo "*" para expresar esa operación de asociación, las 4 opciones, con sus resultados, se escribirían de la siguiente manera: I * I = I; I * r = r; r * I = r; r * r = I. Para graficar estas operaciones se utiliza una especie de tabla de multiplicar, llamada tabla de Cayley, que tiene la siguiente forma:

*	I	r
I	I	r
r	r	I

Si analizamos este grupo de simetría de sólo 2 elementos, veremos que todas las condiciones exigidas de la estructura de grupo se cumplen: clausura, ya que toda combinación de I y r nos entrega o I o r; asociatividad: en este caso al sólo haber dos elementos resulta superflua; elemento identidad: cualquier elemento del grupo, al "multiplicarse" por I tiene como resultado el mismo elemento; elemento inverso: r es su propio elemento inverso y es también el inverso de I.

Pero pasemos a una figura de mayor complejidad, así permitimos que aparezcan propiedades nuevas. Si tenemos un cuadrado ABCD, podemos en primer lugar reconocer 4 simetrías: si lo giramos en el sentido de las agujas del reloj, éste se mantiene simétrico bajo 4 operaciones: al mantenerlo igual o rotarlo 360° (I), al rotarlo 90° (r_1), 180° (r_2) y 270° (r_3). Pero pueden reconocerse 4 simetrías más, ya que si trazamos diversas líneas, una a través de un eje horizontal, otra a través de un eje vertical, y dos a través de los ejes transversales, podemos operar reflexiones (v1, v2, v3, v4) que mantienen la figura del cuadrado invariante.



Se trata entonces de un grupo con 8 simetrías. Pero si hacemos la tabla de Cayley correspondiente, podremos reconocer una nueva noción, la de subgrupo. Si ponemos nuestra atención en el cuadrado que forman los cuatro primero casilleros de las filas y las columnas, comprobaremos que las rotaciones, cualquiera sea la forma en que se combinen entre sí, sólo darán como resultado otras rotaciones.

*	I	r1	r2	r3	v1	v2	v3	v4
I	I	r1	r2	r3	v1	v2	v3	v4
r1	r1	r2	r3	I	v4	v3	v1	v2
r2	r2	r3	I	r1	v2	v1	v4	v3
r3	r3	I	r1	r2	v3	v4	v2	v1
v1	v1	v3	v2	v4	I	r2	r1	r3
v2	v2	v4	v1	v3	r2	I	r3	r1
v3	v3	v2	v4	v1	r3	r1	I	r2
v4	v4	v1	v3	v2	r1	r3	r2	I

El grupo de las rotaciones constituye así un subgrupo dentro del grupo de las simetrías del cuadrado. Los subgrupos no son otra cosa que grupos, ya que tienen sus mismas propiedades, sólo que referidos a los elementos de un grupo que los contiene. Y en la medida en que la operación identidad cuenta siempre como operación, cada elemento de un grupo conforma por sí mismo un subgrupo, aunque se trate de un grupo trivial. Si suponemos entonces un grupo G que contiene un subgrupo G_3, que a su vez contiene otro subgrupo G_2 que contiene en última instancia a un grupo G_1, este último debe ser un grupo trivial, es decir, contendrá un sólo un elemento, el elemento identidad. Lo que tenemos en un caso así será un "anidamiento" o "encabalgamiento" de grupos.

7. Resolución de las ecuaciones

Podemos preguntarnos entonces qué aporta la noción de grupo en el problema de la resolución de ecuaciones. Como habíamos visto, la individualidad de una cantidad se define por su capacidad de ser intercambiada. Si tenemos la ecuación elemental $x + 7 = 12$, y nos instalamos en el cuerpo de los números racionales Q, vemos que al resolver la ecuación, la cantidad $x = 5$ está determinada como una cantidad individual, ya que, para que se cumpla la relación expresada en la ecuación, la cantidad "5" sólo puede ser reemplazada por sí misma - lo que equivale a decir que no puede ser reemplazada por ninguna otra cantidad. Trazando un paralelo con el ejemplo geométrico que hace un instante invocábamos, si la figura del cuadrado expresa una relación definida de rectas y ángulos, había en cambio 8 operaciones o transformaciones que dejaban tal relación invariante. En el caso de las ecuaciones, los elementos del grupo serán las raíces, y la operación que tendrá lugar entre ellas será la permutación.

La clave entonces será definir una relación que sea invariante, ante la cual puedan contrastarse las raíces posibles. Claro está que la ecuación que se pretende resolver cumple en principio ese rol, pero existe un modo de expresar la ecuación, mediante lo que se conoce como funciones simétricas, que resulta fundamental, ya que permite separar las raíces aunque éstas todavía sigan siendo desconocidas. Para ello lo que se hace es despotenciar la ecuación, descomponiéndola en un producto de factores lineales. Así, por ejemplo, en el caso de las ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$, éstas también pueden expresarse de la siguiente manera:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Allí vemos cómo la incógnita, que estaba elevada al cuadrado, pasa a expresarse como el producto de dos incógnitas distintas aunque todavía indeterminadas. Multiplicando dicha expresión para eliminar los paréntesis, obtenemos la expresión:

$$x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

Por otra parte, si partimos de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, uno de los pasos intermedios que permiten llegar a la fórmula cuadrática (el de dividir todo por el coeficiente a), deja a la ecuación de la siguiente manera:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Si prestamos atención a la similitud formal entre las dos ecuaciones equivalentes, podemos ver que el lugar que en la primera lo ocupa $x_1 + x_2$, en la segunda lo ocupa $\frac{b}{a}$, mientras que lo mismo sucede en el caso de x_1x_2 y $\frac{c}{a}$. Ello nos permite entonces plantear las siguientes igualdades:

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$$
$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Para probar si esas relaciones efectivamente funcionan, tomemos el caso de la siguiente ecuación cuadrática $x^2 - 4x + 1 = 0$, cuyas raíces son: $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ y $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. La siguiente relación debería entonces probarse verdadera:

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$$
$$2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = \frac{4}{1}$$
$$2 + 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 4$$
$$2 + 2 = 4$$

Y lo mismo con la segunda relación señalada:

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$
$$(2 + \sqrt{3})\ (2 - \sqrt{3}) = \frac{1}{1}$$
$$4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}^2 = 1$$
$$4 - 3 = 1$$

Si intercambiamos las raíces x_1 y x_2, las relaciones expresadas por las ecuaciones anteriores se mantendrán. Así:

$$x_2 + x_1 = 4$$
$$x_2 x_1 = 1$$

Las raíces de esta ecuación forman un grupo de dos permutaciones: la permutación identidad, y la permutación que cambia a x_1 por x_2 (y viceversa, por eso es un grupo cíclico de orden 2). En los casos más sencillos, en que la ecuación tiene una sola raíz, como por ejemplo en la ecuación $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0$, el grupo de sus raíces es trivial ya que contiene solo la permutación identidad. Lo mismo sucede cuando la ecuación posee dos raíces racionales distintas, como el caso de $x^2 - 7x + 10 = (x -2)\ (x - 5) = 0$.

En el caso que estudiamos anteriormente, el grupo de las raíces poseía dos permutaciones porque se trataba de raíces con números complejos (desde el cuerpo de los números racionales Q, el número complejo $\sqrt{3}$ queda indeterminado, de allí que resulta indistinto el signo que le preceda).

Pero para ver en funcionamiento este procedimiento, y ver la progresividad de la determinación en cuestión, hace falta recurrir a una ecuación de un grado más elevado. Como lo que nos interesa no es brindar una técnica de resolución, sino analizar su procedimiento, recurriremos a lo que Vuillemin presenta como un método *a posteriori*, ya que en esta exposición tiene un lugar esencial la noción de cuerpos de adjunción, cosa que no sucede en el método *a priori*, a la vez que puede reconocerse con mayor claridad la progresividad en la determinación recíproca que se produce entre éstos y los grupos de permutaciones. Se trata pues de una exposición *a posteriori* porque se parte de una ecuación cuyas raíces ya se conocen. El caso que tomaremos será más precisamente la solución general a la ecuación cuártica, debida a Descartes y Ferrari. Partamos de la ecuación

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

Como p y q son indeterminadas, hay que formar el cuerpo R adjuntándole los parámetros p y q al cuerpo de los números racionales: R = Q (p, q). Las 4 raíces de esta ecuación son

$$\frac{\pm\sqrt{-p \pm \sqrt{p^2} - 4q}}{2}$$

Ninguna de las cuales ninguna pertenece a R ni es conocida por tanto racionalmente. Esta ausencia de determinabilidad dentro de un dominio de racionalidad definido quita la posibilidad a las cuatro raíces de ser discernibles y poseer así individualidad. Ahora bien, tal como lo mostrábamos para la ecuación cuadrática, utilizando las funciones simétricas, pueden conocerse ciertas relaciones entre las raíces aún sin conocer éstas en su individualidad.[13] En este caso:

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_3 + x_4 = 0$$

[13] Por las funciones simétricas se obtienen las siguientes relaciones: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, y $x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = 0$. Que se pueden escribir, tal como habíamos hecho en el caso de la fórmula cuadrática, de la siguiente manera: $x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 x_2) = 0$, y $(x_1 + x_2)(x_3 x_4 - x_1 x_2) = (x_3 + x_4)(x_1 x_2 - x_3 x_4) = 0$. Lo que nos da la relación que utilizaremos $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0$.

Pero, así como no podemos conocer individualmente las raíces, tampoco podemos en este caso individualizar cada pareja de raíces. El grupo de las sustituciones posibles entre las raíces, siendo estas 4, y definiéndose las sustituciones posibles por 4! (que significa 4·3·2·1) es igual a 24. Para iniciar el proceso de individualización de las raíces, lo que hay que hacer es limitar aquellas sustituciones posibles, probando cuáles de ellas mantienen verdaderas todas las relaciones en R. El grupo de las sustituciones que lo consigue es el grupo de Galois G_x, que contiene las siguientes sustituciones:

$$G_x = \{E, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$$

Siendo E siempre la sustitución identidad,[14] y las siguientes:[15]

$$S_1 = (x_1\,x_2)\,(x_3)\,(x_4),\ S_2 = (x_1)\,(x_2)\,(x_3\,x_4),\ S_3 = (x_1\,x_2)\,(x_3\,x_4),\ S_4 = (x_1\,x_3)\,(x_2\,x_4),$$
$$S_5 = (x_1\,x_4\,x_2\,x_3),\ S_6 = (x_1\,x_3\,x_2\,x_4),\ S_7 = (x_1\,x_4)\,(x_2\,x_3)$$

Como dice Verriest, citado tanto por Vuillemin como por Deleuze: "Este grupo es la medida exacta de la incapacidad relativa en la que estamos de discernir las raíces. Decimos incapacidad relativa, ya que esta incapacidad no es total, en la medida en que no todas las sustituciones están permitidas".[16] Al encontrar entonces relaciones que dejen de ser verdaderas al operar alguna de esas sustituciones, nuestra capacidad de discernimiento aumenta.

Si tomamos, por ejemplo, la expresión $x^2_1 - x^2_3$, sabemos, utilizando los métodos de resolución de Ferrari, que dicha expresión es igual a $+\sqrt{p^2 - 4q}$. Al adjuntar esa nueva cantidad al cuerpo R, obtenemos el cuerpo R' = R $(\sqrt{p^2 - 4q})$, extendiéndose el dominio de racionalidad. Conociendo entonces racionalmente la relación $x^2_1 - x^2_3 = \sqrt{p^2 - 4q}$, podemos evaluar para qué substituciones del grupo G_x esta relación es verdadera. Si tomamos las relaciones que conocíamos como verdaderas: $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, podemos llegar a las siguientes igualdades:

$$x^2_1 = x^2_2$$
$$x^2_3 = x^2_4$$

[14] "E" es otro de los modos establecidos para expresar la sustitución identidad.

[15] Aquí se utiliza una notación que debería leerse de la siguiente manera. Los elementos que figuran en un mismo paréntesis se permutan sucesivamente, de izquierda a derecha, y permutándose el último del paréntesis por el primero. Los términos encerrados individualmente entre paréntesis no se permutan. A modo de ejemplo, la permutación S_1 se leería de la siguiente manera: x_1 se permuta por x_2, x_2 se permuta por x_1, x_3 no se permuta, x_4 no se permuta. La permutación S_3 se leería: x_1 se permuta por x_2, x_2 se permuta por x_1, x_3 se permuta por x_4, x_4 se permuta por x_3.

[16] J. Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, Paris, P.U.F., 1962, p. 243.

Lo que nos permite reemplazar, en la ecuación $x^2_1 - x^2_3 = \sqrt{p^2 - 4q}$, a x_1 por x_2 y a x_3 por x_4, tanto por separado como simultáneamente. Lo que significa, si tenemos en cuenta las 8 sustituciones que conformaban el grupo Gx, que sólo las primeras 4 (E, S_1, S_2, S_3) se mantienen verdaderas, mientras que las segundas 4 resultan excluidas. Así, la adjunción de la cantidad $\sqrt{p^2 - 4q}$ permite discernir las dos parejas x_1 y x_2, x_3 y x_4. El grupo de la ecuación se vio reducido gracias a dicha adjunción, por lo que podemos escribirlo de la siguiente manera:

$$G'_x = \{E, S_1, S_2, S_3\}$$

Al interior de cada pareja, sin embargo, las raíces siguen siendo indistinguibles, manteniéndose todas las relaciones en R' verdaderas para las 4 primeras sustituciones. Adjuntemos entonces al cuerpo R' una cantidad $\sqrt{\frac{-p-D}{2}}$, en donde D representa la cantidad $\sqrt{p^2 - 4q}$, lo que nos da el cuerpo R" = R ($\sqrt{\frac{-p-D}{2}}$). En dicho cuerpo, se conoce racionalmente la relación

$$x_3 - x_4 = 2\sqrt{\frac{-p-D}{2}}$$

Relación que se mantiene verdadera para las sustituciones E y S_1, ya que en estas no se permutan ni x_3 ni x_4, pero se hace falsa para las sustituciones S_2 y S_3. Lo que nos deja con el grupo

$$G''_x = \{E, S_1\}$$

Se logran así individualizar las raíces x_3 y x_4, pero quedan todavía por definir las raíces x_1 y x_2, para lo cual se lleva a cabo una última adjunción, en este caso la de la cantidad $\sqrt{\frac{-p-D}{2}}$, por lo cual se obtiene el cuerpo R"' = R" $\sqrt{\frac{-p-D}{2}}$. Si tomamos en dicho cuerpo la relación $x_1 - x_2 = 2\sqrt{\frac{-p+D}{2}}$, la única sustitución que se admite es la sustitución idéntica, por lo que el grupo de la ecuación se reduce a uno y las dos raíces logran distinguirse:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-p+I}{2}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{-p+D}{2}}$$

Como ambas cantidades pertenecen al cuerpo R"', la ecuación se encuentra así resuelta. Puede verse entonces la relación que hay entre dos series de operaciones, entre la descomposición de un grupo en subgrupos, unos encajados dentro de los otros, y las extensiones sucesivas de un cuerpo.

8. Conclusión: hacia la determinación progresiva

Estamos ahora en condiciones de justificar las afirmaciones que habíamos hecho al inicio. La teoría de Galois —en conjunción con los aportes de Abel—, no sólo sirve a Deleuze como un caso, ni aún como el caso inaugural, de inversión de la relación clásica solución-problema, rompiendo el círculo vicioso por el cual las soluciones determinan externamente la verdad o falsedad de un problema. Es decir, no se trata de tomar como ejemplo ilustrativo al modelo de Galois, sino de extraer de él un rasgo característico y un movimiento lógico, que serán componentes esenciales de la teoría deleuziana de las Ideas-problema. Ese movimiento será el de la determinación progresiva, y la noción concreta que Deleuze extrae, manteniendo el mismo nombre dado por Galois, será la de "cuerpo de adjunción".

Si en el transcurso de la exposición deleuziana los tres momentos de la determinación que definían a la Idea como razón suficiente podían parecer momentos estáticamente distinguidos, éstos sin embargo "encuentran su unidad sistemática en la determinación progresiva".[17] Éste tipo de determinación, que define un tiempo propiamente ideal, se desarrolla entre la determinación recíproca y la determinación completa, reconduciendo alternadamente la una hacia la otra. Por un lado, la completitud de la determinación no implica una solución definitiva del problema planteado, sino que vuelve a poner sus soluciones parciales en relación con otras soluciones, estableciendo, sin que ello signifique un retroceso, una nueva determinación recíproca; por otro lado, de la determinación recíproca a la determinación completa, se encuentra implicada "también la progresividad de los cuerpos de adjunción".[18]

Pero si en la teoría de Galois los dos movimientos complementarios eran la adjunción de cuerpos y la descomposición de grupos, es la primera de las dos operaciones la que será conservada, mientras que la segunda encontrará una expresión más satisfactoria desde las categorías del cálculo. Es por ello que, una vez expuestos los tres momentos de la determinación, Deleuze se refiere al movimiento propio de la Idea como vice-dicción, movimiento que comprende dos procedimientos "que intervienen a la vez en la determinación de las condiciones del problema y en la génesis correlativa de los casos de solución son, por una parte, *la precisión de los cuerpos de adjunción*, y, por otra, *la condensación de las singularidades*".[19] Hemos

[17] G. Deleuze, *Diferencia y repetición*, Buenos Aires, Amorrortu, 2006, p. 317.
[18] G. Deleuze, *Diferencia y repetición*, Buenos Aires, Amorrortu, 2006, p. 317.
[19] G. Deleuze, *Diferencia y repetición*, Buenos Aires, Amorrortu, 2006, pp. 287-288.

intentado aquí detenernos en esos rasgos propios que refieren al proceso de resolución mediante la determinación de las condiciones del problema; abordar, por su parte, el proceso de la vice-dicción en su conjunto, dando cuenta del funcionamiento de la Idea y de las características de lo virtual como dimensión objetiva problemática, excede en mucho las posibilidades del presente texto.